

## Capítulo 8

# Memorias Asociativas Morfológicas

### 8.1. Contexto.

Los trabajos de Hopfield causaron excitación en el mundo de las memorias asociativas y las redes neuronales, de modo tal que muchos de los científicos que habían estado al margen, gracias a Hopfield se interesaron en estos temas y se generó una actividad importante. En la segunda mitad de la década de los ochenta del siglo XX aparecieron investigadores que tomaron los modelos clásicos, los modificaron o extendieron y dieron lugar a nuevos tipos de memorias asociativas, cuya importancia radica en que son consecuencia del trabajo de los grandes hombres involucrados en la concepción y desarrollo de los modelos hasta ahora descritos en esta obra.

Entre la miríada de aportaciones e innovaciones en el campo de las memorias asociativas, después del espectacular éxito de la memoria Hopfield de 1982, no sucedió nada realmente trascendente hasta 1998, cuando aparecieron las memorias asociativas morfológicas.

La diferencia fundamental entre estas memorias y las memorias asociativas clásicas como el *Linear Associator* y la Memoria Hopfield, es que mientras éstas basan su operación en la suma y multiplicación usuales, las memorias morfológicas se basan en las operaciones morfológicas de dilatación y erosión. En otras palabras, mientras que las memorias asociativas clásicas echan mano de la suma de productos, las memorias asociativas morfológicas hacen uso de máximos o mínimos de sumas.

## 8.2. Memorias Morfológicas Heteroasociativas.

Los modelos de memorias asociativas hasta aquí presentados en este libro funcionan con base en las operaciones usuales de suma y multiplicación. A este tipo de memorias asociativas, representadas principalmente por el *Linear Associator* y la memoria Hopfield, se les llama *clásicas* para contrastar su funcionamiento con las *memorias asociativas morfológicas*.

La diferencia fundamental entre las memorias asociativas clásicas y las morfológicas, radica en que los fundamentos operacionales de las *memorias asociativas morfológicas*, se encuentran en las operaciones morfológicas de dilatación y erosión. Estas memorias rompieron el esquema utilizado a través de los años en los modelos de memorias asociativas clásicas, que utilizan operaciones convencionales entre vectores y matrices para la fase de aprendizaje, y *suma de productos* para recuperar patrones.

Las memorias asociativas morfológicas, por otro lado, usan *máximos o mínimos de sumas* para la fase de aprendizaje, y *máximos o mínimos de sumas* para la fase de recuperación (Ritter, Sussner & Diaz-de-Leon, 1998; Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999).

La información que se expone a continuación constituye un resumen ilustrativo del diseño, operación y características de las memorias asociativas morfológicas y está tomada libremente del contenido de estas dos referencias (las cuales contienen, en total, 17 teoremas y cuatro corolarios) y de (Díaz-de-León & Yáñez, 1999).

Hay dos tipos de memorias asociativas morfológicas: las memorias *max*, simbolizadas con *M*, y las memorias *min*, las cuales se simbolizan con *W*: en cada uno de los dos tipos, las memorias pueden funcionar en ambos modos *heteroasociativo* y *autoasociativo*. Nótese, de entrada, esta ventaja que poseen las memorias asociativas morfológicas respecto de la memoria Hopfield, la cual se diseñó para funcionar sólo como memoria autoasociativa.

El conjunto fundamental será  $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$  con

$$\mathbf{x}^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n \quad \text{y} \quad \mathbf{y}^\mu = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \in A^m$$

Antes de iniciar, es necesario definir dos nuevas operaciones entre matrices en términos de las operaciones  $+$ ,  $\vee$  y  $\wedge$ , con el fin de poder expresar las fases de aprendizaje y recuperación de las memorias asociativas morfológicas.

Sea  $D$  una matriz  $[d_{ij}]_{m \times p}$  y  $H$  una matriz  $[h_{ij}]_{p \times n}$  cuyos términos son números enteros.

El *producto máximo* de  $D$  y  $H$ , denotado por  $C = D \nabla H$ , da como resultado una matriz  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$  y se define de la siguiente manera:

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^p (d_{ik} + h_{kj}) \quad (8.1)$$

Existen dos casos particulares de suma importancia en la aplicación del *producto máximo*.

El primer caso es cuando  $D$  es una matriz de dimensiones  $m \times n$  y  $H$  es un vector columna de dimensión  $n$ . Al aplicar la expresión 8.1 para calcular el producto máximo  $C = D \nabla H$  cuando  $D$  es una matriz  $[d_{ij}]_{m \times n}$  y  $H$  es un vector columna de dimensión  $n$   $[h_i]_n$  se obtiene un vector columna  $C$  de dimensión  $m$ , cuya  $i$ -ésima componente es:

$$c_i = \bigvee_{j=1}^n (d_{ij} + h_j) \quad (8.2)$$

El segundo caso es cuando se realiza el *producto máximo* entre un vector columna de dimensión  $m$  por un vector fila de dimensión  $n$ ; en ambos vectores se cumple que  $p = 1$ .

Al aplicar la expresión 8.1 para calcular  $C = D \nabla H$  siendo  $D$  un vector columna de dimensión  $m$  y  $H$  un vector fila de dimensión  $n$ , se obtiene una matriz  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ :

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^1 (d_{ik} + h_{kj}) = (d_{i1} + h_{1j})$$

expresión en la que se puede eliminar el subíndice 1, para quedar finalmente que la componente  $c_{ij}$  de la matriz  $[c_{ij}]_{m \times n}$  que resulta del *producto máximo* entre un vector columna  $D$  de dimensión  $m$  por un vector fila  $H$  de dimensión  $n$  es:

$$c_{ij} = (d_i + h_j) \quad (8.3)$$

Similarmente, el *producto mínimo*  $C = D \Delta H$  se define así:

$$c_{ij} = \bigwedge_{k=1}^p (d_{ik} + h_{kj}) \quad (8.4)$$

Al aplicar la expresión 8.4 para calcular el producto mínimo  $C = D \Delta H$  cuando  $D$  es una matriz  $[d_{ij}]_{m \times n}$  y  $H$  es un vector columna de dimensión  $n$   $[h_i]_n$ , se obtiene un vector columna  $C$  de dimensión  $m$ , cuya  $i$ -ésima componente es:

$$c_i = \bigwedge_{j=1}^n (d_{ij} + h_j) \quad (8.5)$$

Y la componente  $c_{ij}$  del *producto mínimo* entre un vector columna  $D$  de dimensión  $m$  por un vector fila  $H$  de dimensión  $n$  es:

$$c_{ij} = \bigwedge_{k=1}^1 (d_{ik} + h_{kj}) = (d_{i1} + h_{j1}) = (d_i + h_j) \quad (8.6)$$

Las expresiones anteriores contienen a los operadores máximo  $\vee$  y mínimo  $\wedge$ , los cuales están íntimamente ligados con los conceptos de las dos operaciones básicas de la morfología matemática: *dilatación* y *erosión*, respectivamente (Serra, 1992; Haralick, Sternberg, & Zhuang, 1987; Ritter, Sussner & Diaz-de-Leon, 1998); de ahí el nombre de memorias asociativas *morfológicas*.

8.2.1. Memorias heteroasociativas *max*

Las memorias morfológicas heteroasociativas *max* utilizan el *producto mínimo* para ambas fases: aprendizaje y recuperación de patrones. Además, en la fase de aprendizaje juega un papel relevante el operador *máximo*; de ahí el nombre de memorias *max*.

La *fase de aprendizaje* consiste de dos etapas:

1. Aplicando la expresión 8.6, para cada una de las  $p$  asociaciones  $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu)$  se encuentra la matriz  $\mathbf{y}^\mu \Delta (-\mathbf{x}^\mu)^t$  de dimensiones  $m \times n$ , donde  $(-\mathbf{x}^\mu)^t = (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu)$ :

$$\mathbf{y}^\mu \Delta (-\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \Delta (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu)$$

$$\mathbf{y}^\mu \Delta (-\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} [y_1^\mu + (-x_1^\mu)] & \dots & [y_1^\mu + (-x_j^\mu)] & \dots & [y_1^\mu + (-x_n^\mu)] \\ [y_2^\mu + (-x_1^\mu)] & \dots & [y_2^\mu + (-x_j^\mu)] & \dots & [y_2^\mu + (-x_n^\mu)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [y_i^\mu + (-x_1^\mu)] & \dots & [y_i^\mu + (-x_j^\mu)] & \dots & [y_i^\mu + (-x_n^\mu)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [y_m^\mu + (-x_1^\mu)] & \dots & [y_m^\mu + (-x_j^\mu)] & \dots & [y_m^\mu + (-x_n^\mu)] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^\mu \Delta (-\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu - x_1^\mu & y_1^\mu - x_2^\mu & \dots & y_1^\mu - x_j^\mu & \dots & y_1^\mu - x_n^\mu \\ y_2^\mu - x_1^\mu & y_2^\mu - x_2^\mu & \dots & y_2^\mu - x_j^\mu & \dots & y_2^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_i^\mu - x_1^\mu & y_i^\mu - x_2^\mu & \dots & y_i^\mu - x_j^\mu & \dots & y_i^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m^\mu - x_1^\mu & y_m^\mu - x_2^\mu & \dots & y_m^\mu - x_j^\mu & \dots & y_m^\mu - x_n^\mu \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

2. Se aplica el operador *máximo*  $\bigvee$  a las  $p$  matrices para obtener la memoria  $M$ .

$$M = \bigvee_{\mu=1}^p [y^\mu \Delta (-x^\mu)^t] = [m_{ij}]_{m \times n} \quad (8.8)$$

de manera que la  $ij$ -ésima componente de la memoria  $M$  se expresa así:

$$m_{ij} = \bigvee_{\mu=1}^p (y_i^\mu - x_j^\mu) \quad (8.9)$$

La *fase de recuperación* consiste en realizar el producto mínimo  $\Delta$  de la memoria  $M$  con un patrón de entrada  $x^\omega$ , donde  $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$ , para obtener un vector columna  $y$  de dimensión  $m$ :

$$y = M \Delta x^\omega \quad (8.10)$$

De acuerdo con la expresión 8.5, la  $i$ -ésima componente del vector  $y$  es:

$$y_i = \bigwedge_{j=1}^n (m_{ij} + x_j^\omega) \quad (8.11)$$

### Ejemplo.-

Este ejemplo es meramente ilustrativo de los tipos de operaciones que se llevan a cabo en la generación y operación de las memorias asociativas morfológicas *max*; no se intenta mostrar, de ningún modo, sus bondades y ventajas, las cuales se tratarán detalladamente en un Informe Técnico de esta misma serie Verde, cuyo título es: "Memorias Asociativas: Clásicas vs. Morfológicas".

Se usarán tres parejas de patrones con  $p = 3$ ,  $n = 5$  y  $m = 3$ .

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para llevar a cabo el primer paso de la fase de aprendizaje, se encuentra la matriz  $\mathbf{y}^\mu \Delta (-\mathbf{x}^\mu)^t$  de dimensiones  $3 \times 5$  para cada una de las parejas del conjunto fundamental (expresión 8.7).

$$\mathbf{y}^1 \Delta (\mathbf{x}^1)^t = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-0 & 1-1 & 1-0 & 1-1 \\ 0-1 & 0-0 & 0-1 & 0-0 & 0-1 \\ 0-1 & 0-0 & 0-1 & 0-0 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^2 \Delta (\mathbf{x}^2)^t = \begin{pmatrix} 0-1 & 0-1 & 0-0 & 0-0 & 0-1 \\ 1-1 & 1-1 & 1-0 & 1-0 & 1-1 \\ 0-1 & 0-1 & 0-0 & 0-0 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^3 \Delta (\mathbf{x}^3)^t = \begin{pmatrix} 0-1 & 0-0 & 0-1 & 0-1 & 0-0 \\ 0-1 & 0-0 & 0-1 & 0-1 & 0-0 \\ 1-1 & 1-0 & 1-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El segundo paso de la fase de aprendizaje consiste en aplicar el operador máximo a las tres matrices (expresión 8.8).

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vee \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \vee (-1) \vee (-1) & 1 \vee (-1) \vee 0 & 0 \vee 0 \vee (-1) & 1 \vee 0 \vee (-1) & 0 \vee (-1) \vee 0 \\ (-1) \vee 0 \vee (-1) & 0 \vee 0 \vee 0 & (-1) \vee 1 \vee (-1) & 0 \vee 1 \vee (-1) & (-1) \vee 0 \vee 0 \\ (-1) \vee (-1) \vee 0 & 0 \vee (-1) \vee 1 & (-1) \vee 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \vee 0 & (-1) \vee (-1) \vee \end{pmatrix}$$

La memoria M queda así:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para la fase de recuperación de patrones, se realiza el producto mínimo entre la memoria  $M$  y cada uno de los tres patrones de entrada del conjunto fundamental (expresiones 8.10 y 8.11).

$$\begin{aligned} y = M \Delta x^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigwedge_{j=1}^5 (m_{1j} + x_j^1) \\ \bigwedge_{j=1}^5 (m_{2j} + x_j^1) \\ \bigwedge_{j=1}^5 (m_{3j} + x_j^1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (0+1) \wedge (1+0) \wedge (0+1) \wedge (1+0) \wedge (0+1) \\ (0+1) \wedge (0+0) \wedge (1+1) \wedge (1+0) \wedge (0+1) \\ (0+1) \wedge (1+0) \wedge (0+1) \wedge (0+0) \wedge (1+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = M \Delta x^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigwedge_{j=1}^5 (m_{1j} + x_j^2) \\ \bigwedge_{j=1}^5 (m_{2j} + x_j^2) \\ \bigwedge_{j=1}^5 (m_{3j} + x_j^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (0+1) \wedge (1+1) \wedge (0+0) \wedge (1+0) \wedge (0+1) \\ (0+1) \wedge (0+1) \wedge (1+0) \wedge (1+0) \wedge (0+1) \\ (0+1) \wedge (1+1) \wedge (0+0) \wedge (0+0) \wedge (1+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = M \Delta x^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigwedge_{j=1}^5 (m_{1j} + x_j^3) \\ \bigwedge_{j=1}^5 (m_{2j} + x_j^3) \\ \bigwedge_{j=1}^5 (m_{3j} + x_j^3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (0+1) \wedge (1+0) \wedge (0+1) \wedge (1+1) \wedge (0+0) \\ (0+1) \wedge (0+0) \wedge (1+1) \wedge (1+1) \wedge (0+0) \\ (0+1) \wedge (1+0) \wedge (0+1) \wedge (0+1) \wedge (1+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y^3 \end{aligned}$$

■

Como se menciona en las referencias, la pregunta obvia a plantear es: ¿cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para asegurar respuesta perfecta en una memoria morfológica  $max$ ? Para ser más específicos, ¿para

qué pares de vectores  $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$  podrá la memoria asociativa descrita por las expresiones 8.7, 8.8, 8.9, 8.10 y 8.11 proporcionar una salida perfecta?. La respuesta a esta interrogante se da en el teorema 1 y su correspondiente corolario 1.1 de (Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999):

**Teorema 1:**  $M \Delta \mathbf{x}^\omega = \mathbf{y}^\omega$  para todo  $\omega = 1, \dots, p$  si y sólo si para cada índice de fila  $i = 1, \dots, m$  existen índices de columna  $j_i^\varepsilon \in \{1, \dots, n\}$  tales que  $m_{ij_i^\varepsilon} = y_i^\omega - x_{j_i^\varepsilon}^\omega$  para todo  $\omega = 1, \dots, p$ .

**Corolario 1.1:**  $M \Delta \mathbf{x}^\omega = \mathbf{y}^\omega$  para todo  $\omega = 1, \dots, p$  si y sólo si para cada índice de fila  $i = 1, \dots, m$  y cada  $\gamma \in \{1, \dots, p\}$  existen índices de columna  $j_i^\gamma \in \{1, \dots, n\}$  tales que

$$x_{j_i^\gamma}^\gamma = \bigwedge_{\varepsilon=1}^p (x_{j_i^\varepsilon}^\varepsilon - y_i^\varepsilon) + y_i^\gamma$$

Con estos dos resultados se garantizan las condiciones formales para la recuperación perfecta en el caso de patrones del conjunto fundamental. En la figura 1 se presenta la respuesta perfecta de una memoria morfológica heteroasociativa *max* al presentársele como entradas los patrones superiores, en donde el conjunto fundamental tenía como salidas los patrones inferiores.

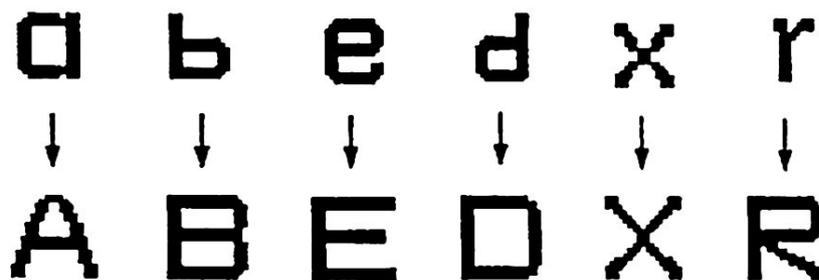


Figura 1

Es importante hacer notar la considerable mejora en la capacidad de almacenamiento de las memorias morfológicas heteroasociativas *max* con respecto a las memorias clásicas, así como el hecho de que la memoria morfológica *no requiere* convergencia; es decir, es capaz de responder en forma perfecta *en un solo paso*.

La segunda pregunta de interés con respecto al desempeño de una memoria asociativa es: ¿qué cantidad, y qué tipo de ruido se puede permitir como

distorsión para los patrones de entrada sin sacrificar la respuesta (salida) perfecta?. Para el caso de las memorias clásicas, es un hecho que aun sin distorsión en la entrada, no es plausible esperar una respuesta perfecta. Para las memorias morfológicas heteroasociativas *max.* en cambio, es permisible la existencia de ruidos sin perder la propiedad de respuesta perfecta. La forma del ruido permisible está dada por el teorema 5 de la misma referencia (Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999):

**Teorema 5:** Para  $\gamma = 1, \dots, p$  sea  $\tilde{x}^\gamma$  una versión distorsionada del patrón  $x^\gamma$ . Entonces  $M \Delta \tilde{x}^\gamma = y^\gamma$  si y sólo si se cumple que:

$$\tilde{x}_j^\gamma \geq x_j^\gamma \wedge \bigvee_{i=1}^m \left( \bigwedge_{\varepsilon \neq \gamma} [y_i^\gamma - y_i^\varepsilon + x_i^\varepsilon] \right) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

y para cada índice renglón  $i \in \{1, \dots, m\}$  existe un índice columna  $j_i \in \{1, \dots, n\}$  tal que:

$$\tilde{x}_{j_i}^\gamma = x_{j_i}^\gamma \wedge \left( \bigwedge_{\varepsilon \neq \gamma} [y_i^\gamma - y_i^\varepsilon + x_{j_i}^\varepsilon] \right)$$

La figura 2 ilustra la recuperación perfecta de patrones alterados con 20% de ruido aditivo, por una memoria morfológica heteroasociativa *max.* Como es posible apreciar, estas memorias son bastante robustas al ruido aditivo.

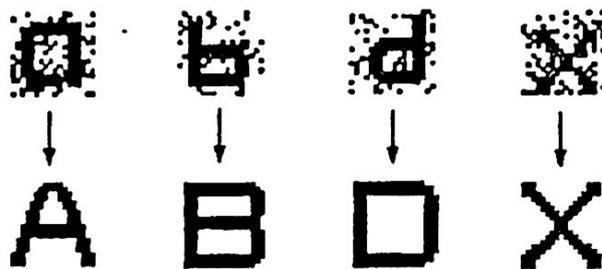


Figura 2

8.2.2. Memorias heteroasociativas *min*

Las memorias morfológicas heteroasociativas *min* utilizan el *producto máximo* para ambas fases: aprendizaje y recuperación de patrones. Además, en la fase de aprendizaje juega un papel relevante el operador *mínimo*; de ahí el nombre de memorias *min*.

La fase de aprendizaje consiste de dos etapas:

1. Aplicando la expresión 8.3, para cada una de las  $p$  asociaciones  $(x^\mu, y^\mu)$  se encuentra la matriz  $y^\mu \nabla (-x^\mu)^t$  de dimensiones  $m \times n$ , donde  $(-x^\mu)^t = (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu)$ :

$$y^\mu \nabla (-x^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \nabla (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu)$$

$$y^\mu \nabla (-x^\mu)^t = \begin{pmatrix} [y_1^\mu + (-x_1^\mu)] & \dots & [y_1^\mu + (-x_j^\mu)] & \dots & [y_1^\mu + (-x_n^\mu)] \\ [y_2^\mu + (-x_1^\mu)] & \dots & [y_2^\mu + (-x_j^\mu)] & \dots & [y_2^\mu + (-x_n^\mu)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [y_i^\mu + (-x_1^\mu)] & \dots & [y_i^\mu + (-x_j^\mu)] & \dots & [y_i^\mu + (-x_n^\mu)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [y_m^\mu + (-x_1^\mu)] & \dots & [y_m^\mu + (-x_j^\mu)] & \dots & [y_m^\mu + (-x_n^\mu)] \end{pmatrix}$$

$$y^\mu \nabla (-x^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu - x_1^\mu & y_1^\mu - x_2^\mu & \dots & y_1^\mu - x_j^\mu & \dots & y_1^\mu - x_n^\mu \\ y_2^\mu - x_1^\mu & y_2^\mu - x_2^\mu & \dots & y_2^\mu - x_j^\mu & \dots & y_2^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_i^\mu - x_1^\mu & y_i^\mu - x_2^\mu & \dots & y_i^\mu - x_j^\mu & \dots & y_i^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m^\mu - x_1^\mu & y_m^\mu - x_2^\mu & \dots & y_m^\mu - x_j^\mu & \dots & y_m^\mu - x_n^\mu \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

2. Se aplica el operador mínimo  $\wedge$  a las  $p$  matrices para obtener la memoria  $W$ .

$$W = \bigwedge_{\mu=1}^p [y^\mu \nabla (-x^\mu)^t] = [w_{ij}]_{m \times n} \quad (8.13)$$

de manera que la  $ij$ -ésima componente de la memoria  $W$  se expresa así:

$$w_{ij} = \bigwedge_{\mu=1}^p (y_i^\mu - x_j^\mu) \quad (8.14)$$

La fase de recuperación consiste en realizar el producto máximo  $\nabla$  de la memoria  $W$  con un patrón de entrada  $x^\omega$ , donde  $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$ , para obtener un vector columna  $y$  de dimensión  $m$ :

$$y = W \nabla x^\omega \quad (8.15)$$

La  $i$ -ésima componente del vector  $y$ , de acuerdo con la expresión 8.2 es:

$$y_i = \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} + x_j^\omega) \quad (8.16)$$

La referencia (Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999) también proporciona respuestas a las dos preguntas:

- ¿cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para asegurar respuesta perfecta en una memoria morfológica heteroasociativa *min*?
- ¿para qué pares de vectores  $\{(x^\mu, y^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$  podrá la memoria asociativa descrita por las expresiones 8.12, 8.13, 8.14, 8.15 y 8.16 proporcionar una salida perfecta?

Las respuestas se encuentran en el teorema 2 y su correspondiente corolario 2.1:

**Teorema 2:**  $\mathbf{W} \nabla \mathbf{x}^\omega = \mathbf{y}^\omega$  para todo  $\omega = 1, \dots, p$  si y sólo si para cada índice de fila  $i = 1, \dots, m$  existen índices de columna  $j_i^\omega \in \{1, \dots, n\}$  tales que  $w_{ij_i^\omega} = y_i^\omega - x_{j_i^\omega}^\omega$  para todo  $\omega = 1, \dots, p$ .

**Corolario 2.1:**  $\mathbf{W} \nabla \mathbf{x}^\omega = \mathbf{y}^\omega$  para todo  $\omega = 1, \dots, p$  si y sólo si para cada índice de fila  $i = 1, \dots, m$  y cada  $\gamma \in \{1, \dots, p\}$  existen índices de columna  $j_i^\gamma \in \{1, \dots, n\}$  tales que

$$x_{j_i^\gamma}^\gamma = \bigvee_{\varepsilon=1}^p (x_{j_i^\varepsilon}^\varepsilon - y_i^\varepsilon) + y_i^\gamma$$

Las memorias morfológicas heteroasociativas *min* muestran experimentalmente un comportamiento similar al de las memorias morfológicas heteroasociativas *max*, cuando se diseñan y se operan en conjuntos fundamentales *sin ruido*; los experimentos son análogos al mostrado en la figura 1, con patrones del mismo tipo y tamaño.

Sin embargo, las memorias morfológicas heteroasociativas *min* responden al ruido de una manera totalmente diferente a como lo hacen las memorias morfológicas heteroasociativas *max*, como se desprende del teorema 6 de (Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999), el cual es la respuesta a la interrogante ¿qué cantidad, y qué tipo de ruido se puede permitir como distorsión para los patrones de entrada en una memoria asociativa morfológica  $\mathbf{W}$  sin sacrificar la respuesta perfecta?

**Teorema 6:** Para  $\gamma = 1, \dots, p$  sea  $\tilde{\mathbf{x}}^\gamma$  una versión distorsionada del patrón  $\mathbf{x}^\gamma$ . Entonces  $\mathbf{W} \nabla \tilde{\mathbf{x}}^\gamma = \mathbf{y}^\gamma$  si y sólo si se cumple que:

$$\tilde{x}_j^\gamma \leq x_j^\gamma \vee \bigwedge_{i=1}^m \left( \bigvee_{\varepsilon \neq \gamma} [y_i^\gamma - y_i^\varepsilon + x_i^\varepsilon] \right) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

y para cada índice renglón  $i \in \{1, \dots, m\}$  existe un índice columna  $j_i \in \{1, \dots, n\}$  tal que:

$$\tilde{x}_{j_i}^\gamma = x_{j_i}^\gamma \vee \left( \bigvee_{\varepsilon \neq \gamma} [y_i^\gamma - y_i^\varepsilon + x_{j_i}^\varepsilon] \right)$$

La contraparte de la figura 2 es la figura 3, donde se ilustra la respuesta de las memorias asociativas morfológicas  $W$  ante patrones de entrada alterados con 20% de ruido sustractivo. A diferencia de las memorias asociativas morfológicas tipo  $M$ , las memorias asociativas morfológicas  $min$  son robustas a ruido sustractivo: en eso difieren principalmente.

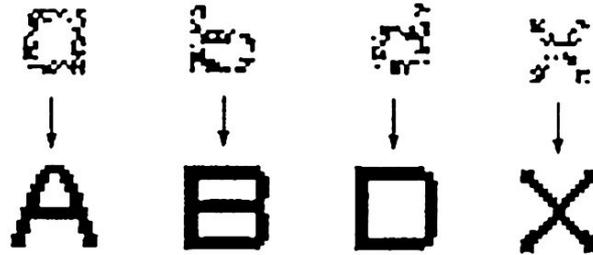


Figura 3

Similarmente a como lo hacen las memorias asociativas morfológicas tipo  $M$ , las memorias asociativas morfológicas tipo  $W$  son capaces de responder en forma perfecta en un solo paso, lo cual significa que *no requiere convergencia*.

### 8.3. Memorias Morfológicas Autoasociativas.

Hay dos tipos de memorias asociativas morfológicas: las memorias  $max$ , simbolizadas con  $M$ , y las memorias  $min$ , las cuales se simbolizan con  $W$ ; en cada uno de los dos tipos, las memorias pueden funcionar en ambos modos *heteroasociativo* y *autoasociativo*. Nótese, de entrada, esta ventaja que poseen las memorias asociativas morfológicas respecto de la memoria Hopfield, la cual se diseñó para funcionar sólo como memoria autoasociativa.

El conjunto fundamental será  $\{(x^\mu, y^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$  con

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n \quad \text{y} \quad y^\mu = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_m^\mu \end{pmatrix} \in A^m$$

Las expresiones anteriores son útiles para ambos modos de operación de las memorias morfológicas: *heteroasociativo* y *autoasociativo*. Dado que en

este número se describirán las memorias morfológicas autoasociativas. el conjunto fundamental estará constituido por parejas de patrones de entrada y salida idénticos: el conjunto fundamental será  $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$  con

$$\mathbf{x}^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n$$

Las expresiones 8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5 y 8.6 se adaptarán considerando esta particularidad de las memorias autoasociativas. al igual como se hizo con la memoria asociativa Hopfield la cual, por su propia naturaleza, tiene la fuerte restricción de que *sólo* actúa en modo autoasociativo.

### 8.3.1. Memorias autoasociativas max

Las memorias morfológicas autoasociativas *max* utilizan el *producto mínimo* para ambas fases: aprendizaje y recuperación de patrones. Además, en la fase de aprendizaje juega un papel relevante el operador *máximo*; de ahí el nombre de memorias *max*.

La *fase de aprendizaje* consiste de dos etapas:

1. Aplicando la expresión 8.6, para cada una de las  $p$  asociaciones  $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu)$  se encuentra la matriz  $\mathbf{x}^\mu \Delta (-\mathbf{x}^\mu)^t$  de dimensiones  $n \times n$ , donde  $(-\mathbf{x}^\mu)^t = (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu)$ :

$$\mathbf{x}^\mu \Delta (-\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \Delta (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu)$$

$$\mathbf{x}^\mu \Delta (-\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} [x_1^\mu + (-x_1^\mu)] & \cdots & [x_1^\mu + (-x_j^\mu)] & \cdots & [x_1^\mu + (-x_n^\mu)] \\ [x_2^\mu + (-x_1^\mu)] & \cdots & [x_2^\mu + (-x_j^\mu)] & \cdots & [x_2^\mu + (-x_n^\mu)] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [x_i^\mu + (-x_1^\mu)] & \cdots & [x_i^\mu + (-x_j^\mu)] & \cdots & [x_i^\mu + (-x_n^\mu)] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [x_n^\mu + (-x_1^\mu)] & \cdots & [x_n^\mu + (-x_j^\mu)] & \cdots & [x_n^\mu + (-x_n^\mu)] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^\mu \Delta (-\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} 0 & x_1^\mu - x_2^\mu & \cdots & x_1^\mu - x_j^\mu & \cdots & x_1^\mu - x_n^\mu \\ x_2^\mu - x_1^\mu & 0 & \cdots & x_2^\mu - x_j^\mu & \cdots & x_2^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_i^\mu - x_1^\mu & x_i^\mu - x_2^\mu & \cdots & 0 & \cdots & x_i^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n^\mu - x_1^\mu & x_n^\mu - x_2^\mu & \cdots & x_n^\mu - x_j^\mu & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

2. Se aplica el operador *máximo*  $\bigvee$  a las  $p$  matrices para obtener la memoria  $\mathbf{M}$ .

$$\mathbf{M} = \bigvee_{\mu=1}^p [\mathbf{x}^\mu \Delta (-\mathbf{x}^\mu)^t] = [m_{ij}]_{n \times n} \quad (8.18)$$

de manera que la  $ij$ -ésima componente de la memoria  $\mathbf{M}$  se expresa así:

$$m_{ij} = \bigvee_{\mu=1}^p (x_i^\mu - x_j^\mu) \quad (8.19)$$

La *fase de recuperación* consiste en realizar el producto mínimo  $\Delta$  de la memoria  $\mathbf{M}$  con un patrón de entrada  $\mathbf{x}^\omega$ , donde  $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$ , para obtener un vector columna  $\mathbf{x}$  de dimensión  $n$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{M} \Delta \mathbf{x}^\omega \quad (8.20)$$

De acuerdo con la expresión 8.5, la  $i$ -ésima componente del vector  $\mathbf{x}$  es:

$$x_i = \bigwedge_{j=1}^n (m_{ij} + x_j^\omega) \quad (8.21)$$

En la descripción de las memorias morfológicas heteroasociativas (número anterior de esta colección) se planteó una pregunta ¿cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para asegurar respuesta perfecta en una memoria morfológica *max*?. Para ser más específicos, ¿para qué pares de vectores  $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$  podrá una memoria morfológica heteroasociativa proporcionar una salida perfecta?. Como se mencionó, la respuesta a esta interrogante se da en el teorema 1 de (Ritter, Diaz-de-Leon & Sussner, 1999):

**Teorema 1:**  $\mathbf{M} \Delta \mathbf{x}^\omega = \mathbf{y}^\omega$  para todo  $\omega = 1, \dots, p$  si y sólo si para cada índice de fila  $i = 1, \dots, m$  existen índices de columna  $j_i^\omega \in \{1, \dots, n\}$  tales que  $m_{ij_i^\omega} = y_i^\omega - x_{j_i^\omega}^\omega$  para todo  $\omega = 1, \dots, p$ .

Al observar la matriz 8.17 de la fase de aprendizaje para las memorias morfológicas autoasociativas, vemos que los elementos de la diagonal principal son ceros, es decir, para cada índice de columna  $i$  existe el índice de fila  $i$  para el cual  $m_{ii} = x_i - x_i = 0$

Lo anterior garantiza que para las memorias morfológicas autoasociativas siempre se cumplen las condiciones del teorema, por lo que estas memorias poseen una fascinante propiedad adicional respecto de las heteroasociativas: tienen *capacidad máxima* de aprendizaje (cuando se permite que los valores de los patrones sean números reales, la capacidad es infinita), según muestra el teorema 4a de (Ritter, Sussner & Diaz-de-Leon, 1998):

**Teorema 4a:**  $\mathbf{M} \Delta \mathbf{x}^\omega = \mathbf{x}^\omega$  para todo  $\omega = 1, \dots, p$ .

Los autores usaron un conjunto fundamental formado por los doce patrones de la figura 1 para crear una memoria Hopfield y una memoria morfológica *max* autoasociativa; ésta última recuperó en forma perfecta todos los patrones del conjunto fundamental.



Figura 8.1: Figura 2

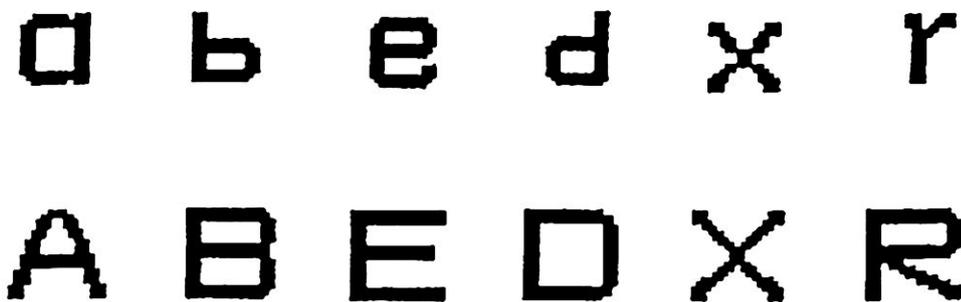


Figura 1

Por otro lado, cuando se le presentó cualquiera de los patrones de entrada del conjunto fundamental a memoria Hopfield, ésta arrojó como salida el patrón de la figura 2:

Como sucede con las memorias morfológicas heteroasociativas *max*, es importante hacer notar la considerable mejora en la capacidad de almacenamiento de las memorias morfológicas autoasociativas *max* con respecto a las memorias clásicas, así como el hecho de que la memoria morfológica *no requiere* convergencia; es decir, es capaz de responder en forma perfecta *en un solo paso*.

### 8.3.2. Memorias autoasociativas *min*

Las memorias morfológicas autoasociativas *min* utilizan el *producto máximo* para ambas fases: aprendizaje y recuperación de patrones. Además, en la fase de aprendizaje juega un papel relevante el operador *mínimo*: de ahí el nombre de memorias *min*.

La *fase de aprendizaje* consiste de dos etapas:

1. Aplicando la expresión 8.3, para cada una de las  $p$  asociaciones  $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu)$  se encuentra la matriz  $\mathbf{x}^\mu \nabla (-\mathbf{x}^\mu)^t$  de dimensiones  $n \times n$ , donde  $(-\mathbf{x}^\mu)^t = (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu)$ :

$$\mathbf{x}^\mu \nabla (-\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \nabla (-x_1^\mu, -x_2^\mu, \dots, -x_n^\mu)$$

$$\mathbf{x}^\mu \nabla (-\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} [x_1^\mu + (-x_1^\mu)] & \dots & [x_1^\mu + (-x_j^\mu)] & \dots & [x_1^\mu + (-x_n^\mu)] \\ [x_2^\mu + (-x_1^\mu)] & \dots & [x_2^\mu + (-x_j^\mu)] & \dots & [x_2^\mu + (-x_n^\mu)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [x_i^\mu + (-x_1^\mu)] & \dots & [x_i^\mu + (-x_j^\mu)] & \dots & [x_i^\mu + (-x_n^\mu)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [x_n^\mu + (-x_1^\mu)] & \dots & [x_n^\mu + (-x_j^\mu)] & \dots & [x_n^\mu + (-x_n^\mu)] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^\mu \nabla (-\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} 0 & x_1^\mu - x_2^\mu & \dots & x_1^\mu - x_j^\mu & \dots & x_1^\mu - x_n^\mu \\ x_2^\mu - x_1^\mu & 0 & \dots & x_2^\mu - x_j^\mu & \dots & x_2^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i^\mu - x_1^\mu & x_i^\mu - x_2^\mu & \dots & 0 & \dots & x_i^\mu - x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^\mu - x_1^\mu & x_n^\mu - x_2^\mu & \dots & x_n^\mu - x_j^\mu & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (8.22)$$

2. Se aplica el operador mínimo  $\bigwedge$  a las  $p$  matrices para obtener la memoria  $W$ .

$$W = \bigwedge_{\mu=1}^p [\mathbf{x}^\mu \nabla (-\mathbf{x}^\mu)^t] = [w_{ij}]_{n \times n} \quad (8.23)$$

de manera que la  $ij$ -ésima componente de la memoria  $W$  se expresa así:

$$w_{ij} = \bigwedge_{\mu=1}^p (x_i^{\mu} - x_j^{\mu}) \quad (8.24)$$

La *fase de recuperación* consiste en realizar el producto máximo  $\nabla$  de la memoria  $W$  con un patrón de entrada  $x^{\omega}$ , donde  $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$ , para obtener un vector columna  $x$  de dimensión  $n$ :

$$x = W \nabla x^{\omega} \quad (8.25)$$

De acuerdo con la expresión 8.2, la  $i$ -ésima componente del vector  $x$  es:

$$x_i = \bigwedge_{j=1}^n (w_{ij} + x_j^{\omega}) \quad (8.26)$$

Similarmente a como lo hacen las memorias asociativas morfológicas tipo  $M$ , las memorias asociativas morfológicas tipo  $W$  son capaces de responder en forma perfecta en un solo paso, lo cual significa que *no requiere convergencia*.

Estas memorias poseen una fascinante propiedad adicional respecto de las heteroasociativas: tienen *capacidad máxima* de aprendizaje (cuando se permite que los valores de los patrones sean números reales, la capacidad es infinita), según muestra el teorema 4b de (Ritter, Sussner & Diaz-de-Leon, 1998):

**Teorema 4b:**  $W \nabla x^{\omega} = x^{\omega}$  para todo  $\omega = 1, \dots, p$ .

El comportamiento de las memorias autoasociativas morfológicas tipo  $W$  es igual al ilustrado en las figuras 1 y 2 para las memorias autoasociativas tipo  $M$ ; se usó el mismo conjunto fundamental de la figura 1 para crear y operar una memoria autoasociativa *min*, la cual respondió de manera perfecta al conjunto de entrada completo.

#### **8.4. Consideraciones finales del capítulo.**

Los problemas abiertos relacionados con las memorias asociativas morfológicas constituyen una rica veta de investigación, donde los científicos mexicanos pueden incursionar, con grandes probabilidades de obtener resultados interesantes para la comunidad internacional que cultiva estos temas.

Actualmente los autores de este modelo de memorias asociativas siguen investigando en éste y en otros temas. El Dr. Gerhard X Ritter es investigador de la University of Florida at Gainesville, mientras que el Dr. Juan Luis Díaz de León Santiago, coautor de esta obra, es el Director del Centro de Investigación en Computación del Instituto Politécnico Nacional

